ELETTROMAGNETISMO
CARICHE E LEGGE DI COULOMB

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

1. La Legge di Coulomb

Esercizio 1. Durante la scarica a terra di un fulmine scorre una corrente di $2.5 \cdot 10^4\, A$ per un tempo di $20\, \mu s$. Trovare la carica che viene trasferita in tale evento

Soluzione:: la corrente è il rapporto tra la quantità di carica che fluisce nell'intervallo di tempo stabilito (sec)

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

da cui

$$\Delta Q = i\Delta t = 2.5 \cdot 10^4\, \frac{Coul}{s} \times 20 \cdot 10^{-6} s = 0.5\, C$$

Esercizio 2. Trovare la forza elettrostatica fra due cariche di $1.00\, C$ alla distanza di $1.00\, m$.

Soluzione:: la forza che ogni carica esercita sull'altra è espressa dalla legge di Coulomb:

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

sostituendo quindi i valori assegnati si ha

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{1.00^2\, C^2}{1.00^2\, m^2} = 8.99 \cdot 10^9\, N$$

Esercizio 3. Una carica puntiforme di $+3.0 \cdot 10^{-6}\, C$ dista $12.0\, cm$ da una seconda carica puntiforme di $-1.50 \cdot 10^{-6}\, C$. Calcolare l'intensità della forza su ciascuna carica.

Soluzione:: sempre applicando la legge di Coulomb si può ottenere la forza che una carica esercita sull'altra (la terza legge di Newton vale per tutte le forze)

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{3.0 \cdot 10^{-6} \times \left(-1.50 \cdot 10^{-6}\right)}{0.12^{\,2}} = -2.81\, N$$

Esercizio 4. Trovare la distanza che separa due cariche puntiformi $q_1 = 26.0\, \mu C$ e una carica puntiforme $q_2 = -47.0\, \mu C$ affinché la forza elettrica attrattiva tra di esse sia pari a $5.70\, N$.

Soluzione:: È necessario in questo caso utilizzare una forma inversa della legge di Coulomb, nella quale la grandezza incognita sia la distanza, cioè

$$d = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}} = \sqrt{\frac{8.99 \cdot 10^9 \times 26.0 \cdot 10^{-6} \times (47.0 \cdot 10^{-6})}{5.70}} = 1.39\, m$$

le cariche vengono calcolate in valore assoluto.

Esercizio 5. Due particelle aventi la stessa carica vengono tenute a una distanza di $3.2 \cdot 10^{-3}\, m$; a un certo punto esse sono lasciate libere. Si misurano le accelerazioni iniziali delle particelle che risultano essere pari a $7.0\, m/s^2$ e $9.0\, m/s^2$. La massa della prima particella è $\times 6.3 \cdot 10^{-7}\, kg$. Determinare la massa e la carica della seconda particella.

Soluzione:: La seconda legge di Newton descrive il legame tra la forza e l'accelerazione impressa a un corpo. Pertanto se

$$F_1 = m_1 a_1 = \times 6.3 \cdot 10^{-7} \times 7.0\, \frac{m}{s^2} = 4.4 \cdot 10^{-6}\, N$$

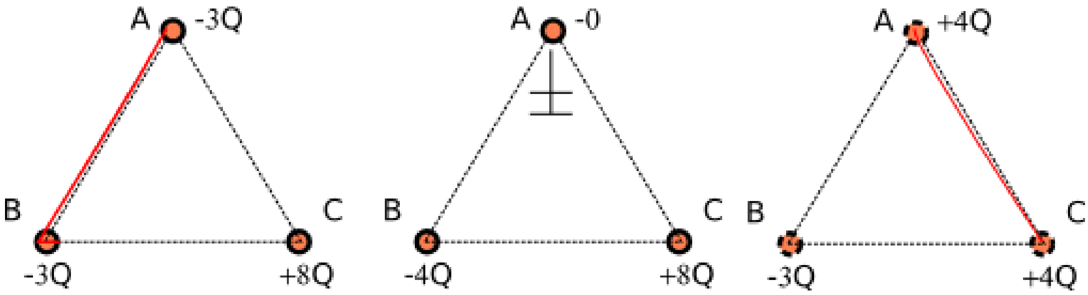
Ma per la terza legge di Newton $F_1 = F_2$, per cui

$$m_2 = \frac{F_2}{a_2} = \frac{4.4 \cdot 10^{-6}\, N}{9.0\, \frac{m}{s^2}} = 4.9 \cdot 10^{-7}\, kg$$

e di conseguenza per la legge di Coulomb la carica sarà

$$q = \sqrt{\frac{Fd^2}{k}} = \sqrt{\frac{4.4 \cdot 10^{-6}\, N \times \left(3.2 \cdot 10^{-3}\, N\right)^2}{8.99 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2}}} = 7.1 \cdot 10^{-11}\, C$$

Esercizio 6. Tre sfere conduttrici identiche A, B, C sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato d (vedi figura). Esse hanno cariche iniziali rispettivamente di $-2Q$, $-4Q$, $8Q$. Trovare il modulo della forza tra A e C. Si eseguono poi le seguenti operazioni: si mettono in contatto momentaneamente con un sottile filo A e B; poi si collega a terra A; infine si collegano temporaneamente col filo A e C. Trovare i moduli delle forze tra A e C e tra B e C.



Soluzione: Calcoliamo dapprima la forza che si esercita tra le sfere cariche A e C

$$F_{A-C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{16Q^2}{d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

La figura mostra le operazioni eseguite e le corrispondenti variazioni nelle distribuzioni di carica, per cui la forza tra A e C diviene

$$F_{A-C} = \frac{16Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

e la forza tra B e C sarà

$$F = \frac{12Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{3Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Esercizio 7. Due sfere conduttrici identiche,1 e 2, possiedono una egual quantità di carica e sono tenute a una distanza reciproca molto maggiore rispetto al loro diametro. Una forza elettrostatica **F** agisce sulla sfera 2 per effetto della sfera 1. Si supponga che una terza sfera identica 3, dotata di un manico isolante inizialmente scarica, venga messa in contatto prima con la sfera 1, poi con la sfera 2 e infine venga rimossa. Si trovi la forza elettrostatica che agisce sulla sfera 2 in funzione di **F**.

Soluzione: La forza che la sfera 1 esercita sulla 2 è

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{d^2}$$

se la sfera 3 viene a contatto con la 1, allora essa riceverà metà della carica di 1, cioè la sfera 1 e la 3 avranno una carica $\frac{Q}{2}$. Ora, se la sfera 3 viene a contatto anche con la 2, si avrà una ridistribuzione di carica pari a $\frac{3Q}{4}$. Pertanto la forza che si esercita sarà

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{3Q}{4}}{d^2} = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{d^2} = \frac{3}{8} F$$

Esercizio 8. Tre particelle cariche, q_1, q_2, q_3 nell'ordine, sono poste lungo una linea retta, separate ognuna da una distanza d. Le cariche q_1e $q_2$sono tenute ferme. La carica q_3, posta tra le due, è libera di muoversi e viene a trovarsi in equilibrio rispetto all'azione delle forze elettriche. Si determini $q_1$in funzione di q_2.

Soluzione: Se la carica q_3 è in equilibrio significa che la forza prodotta dalle cariche q_1 e q_2 sono uguali e contrarie. Pertanto

$$F_{1-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{(2d)^2}$$

$$F_{2-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{d^2}$$

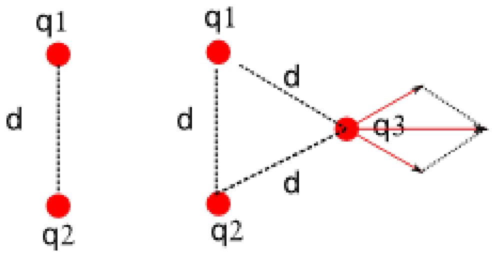
Eguagliando le due forze, si ha

$$\frac{q_1q_3}{4d^2} = -\frac{q_2q_3}{d^2}$$

da cui

$$q_1 = -4q_2$$

Esercizio 9. La figura mostra due cariche q_1 e q_2 tenute ferme a una distanza d l'una dall'altra. Trovare l'intensità della forza elettrica che agisce su q_1. Si supponga $q_1 = q_2 = 20.0\,\mu C$ e $d = 1.50\,m$. Una terza carica $q_3 = 20.0\,\mu C$ vie4ne avvicinata e collocata come mostrato sempre in figura. Si determini l'intensità della forza elettrica agente su q_1.



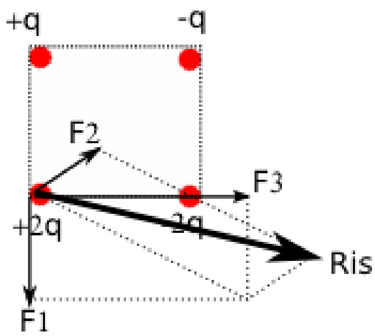
Soluzione: Determiniamo l'intensità della forza nella prima disposizione

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2} = 8.99\cdot 10^9\,\frac{\left(20.0\cdot 10^{-6}\right)^2}{1.50^2} = 1.60\,N$$

Aggiungiamo ora la terza carica, che, come nella figura, si dispone nel terzo vertice di un triangolo equilatero. Sulla carica q_1 agiranno ora entrambe le cariche. Vale sempre il principio di somma vettoriale delle forze, per cui la risultante sarà il doppio dell'altezza del triangolo equilatero avente per lato l'intensità della forza

$$F = 2\times 1.60\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.77\,N$$

Esercizio 10. Quattro cariche sono disposte ai vertici di un quadrato, come mostrato in figura. Si assuma $q = 1.10\cdot 10^{-7}\,C$ e il lato del quadrato, a, uguale a $5.0\,cm$. Trovare le componenti verticali e orizzontali della forza elettrostatica risultante agente sulla carica $+q$.



Soluzione: Calcoliamo l'intensità delle forze, ricordando che se il lato del quadrato è uguale ad a, allora la sua diagonale è uguale a $a\sqrt{2}$:

$$F_1 = k\frac{2q^2}{a^2}\qquad F_2 = k\frac{2q^2}{2a^2} = k\frac{q^2}{a^2}\qquad F_3 = k\frac{4q^2}{a^2}$$

da cui si deduce che

$$F_2 = \frac{F_1}{2}\qquad F_1 = \tfrac{1}{2}F_3\qquad F_3 = 4F_2$$

Assumiamo come versi positivi quello diretto verso l'alto e a destra. Osservando i vettori disegnati in figura si ricava che F_1 ha solo componente verticale, per cui

$$F_{1x} = 0 \qquad F_{1y} = -k\frac{2q^2}{a^2}$$

il vettore F_2 è diretto lungo la diagonale e forma quindi con il lato un angolo di 45°, per cui le due componenti saranno uguali

$$F_{2x} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a^2} \qquad F_{2y} = \frac{F_2}{\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a^2}$$

Il terzo vettore è diretto lungo il lato ed avrà solo componente orizzontale

$$F_{3x} = k\frac{4q^2}{a^2} \qquad F_{3y} = 0$$

Sommiamo ora le componenti vettorialmente

$$\begin{aligned} R_x &= 0 + k\frac{q^2}{a^2} + k\frac{4q^2}{a^2} = k\frac{5q^2}{a^2} = \frac{8.99\cdot 10^9 \times 4 \times \left(1.10\cdot 10^{-7}\right)^2}{\left(5.0\cdot 10^{-2}\right)^2} = 0.17\,N \\ R_y &= -k\frac{2q^2}{a^2} + k\frac{q^2}{a^2} + 0 = -k\frac{q^2}{a^2} = -\frac{8.99\cdot 10^9 \times \left(1.10\cdot 10^{-7}\right)^2}{\left(5.0\cdot 10^{-2}\right)^2} = -0.046\,N \end{aligned}$$

Esercizio 11. Due cariche q_1 e q_2 sono posto rispettivamente sull'asse x nei punti $x = -a$ e $x = +a$. Trovare la relazione tra le due cariche affinché sia nulla la forza elettrostatica netta che agisce su una terza carica $+Q$ posta nel punto $x = \frac{a}{2}$.

Soluzione: Se la forza totale è nulla, allora le due forze prodotte da q_1e q_2 devono essere uguali in modulo e contrarie in verso. Pertanto,

$$F_1 = k\frac{q_1 Q}{\frac{9}{4}a^2} = F_2 = k\frac{q_2 Q}{\frac{1}{4}a^2}$$

da cui

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}} = 9$$

[il calcolo era riducibile al quadrato del rapporto tra le due distanze]

Esercizio 12. Due piccole sfere vengono caricate positivamente con una carica totale pari a $5.0\cdot 10^{-5}\,C$. Le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $1.0\,N$ essendo tenute ad una distanza di $2.0\,m$. Calcolare la carica su ciascuna sfera.

Soluzione: La somma delle due cariche è pari a $5.0\cdot 10^{-5}\,C$ e il loro prodotto è ottenibile applicando la legge di Coulomb

$$1\,N = 8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{q_1 q_2\,C^2}{4.0\,m^2}$$

per cui

$$q_1 q_2 = \frac{4}{8.99\cdot 10^9} = 4.45\cdot 10^{-10}$$

ricordando le proprietà delle soluzioni delle equazioni di secondo grado $x_1 + x_2 = -s$ e $x_1 x_2 = p$, si possono ottenere le singole cariche risolvendo l'equazione

$$Q^2 - 5.0\cdot 10^{-5} Q + 4.45\cdot 10^{-10} = 0$$

da cui $q_1 = 1.2\cdot 10^{-5}$ e $q_2 = 3.8\cdot 10^{-5}$.

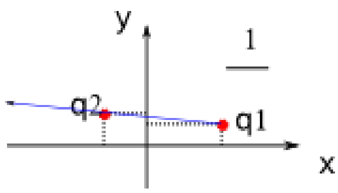
Esercizio 13. Due sfere conduttrici identiche caricate con segno opposto si attraggono con una forza di $0.108\,N$ essendo tenute ad una distanza di $50.0\,cm$. Le sfere vengono improvvisamente collegate con un filo conduttore, che viene poi rimosso. Alla fine le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $0.0360\,N$. Trovare le cariche iniziali delle sfere.

Soluzione: Prima del collegamento il prodotto delle due cariche vale:
$$q_1q_2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.108\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2m^2}} = -3.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$
dopo il collegamento le due cariche sono uguali ma di segno opposto
$$Q^2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.0360\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2m^2}} = 1.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$
da cui
$$Q = 1.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$
nel collegamento ogni carica sarà pari al valor medio delle due,
$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$
per cui
$$q_1 + q_2 = 2.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$
componendo le due informazioni, si ha
$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = & 2.0 \cdot 10^{-6} \\ q_1q_2 & = & -3.0 \cdot 10^{-12} \end{cases}$$
l'equazione risolvente è
$$Q^2 - 2.0 \cdot 10^{-12}Q \pm 3.0 \cdot 10^{-12} = 0$$
si ottengono due possibili coppie di soluzioni
$$q_1 = 3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$
$$q_1 = -3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$

Esercizio 14. Due cariche $+1.0\,\mu C$ e $-3.0\,\mu C$ vengono poste a una distanza di $10\,cm$. Stabilire dove collocare una terza carica in modo che su di essa non agisca alcuna forza.

Soluzione: Se sulla terza carica non deve agire alcuna forza, allora $F_1 = -F_2$. La carica q_3 può avere segno positivo o negativo. Nel primo caso q_1 eserciterà una forza repulsiva e q_2 attrattiva. Se q_3 è negativa si avrà una condizione invertita. Se q_3 è posta tra le due cariche non si verifica in ogni caso la condizione richiesta perché il verso delle due forze risulta concorde e la somma diversa da zero. La carica q_3 deve pertanto essere esterna alle due cariche e in particolare alla sinistra della carica q_1 che ha valore minore, poiché in questo caso è possibile disporre q_3 ad una distanza inferiore a quella da q_2. Poniamo il riferimento nella carica q_1 e indichiamo con x la distanza tra q_1 e q_3. La distanza tra q_2 e q_3 sarà quindi $10 + x$. La somma delle forze esercitate dalle due cariche su q_3 deve essere nulla e poiché le due forze hanno verso contrario si può scrivere
$$\frac{1q_3}{x^2} = \frac{3q_3}{(10+x)^2}$$
dividendo per q_3 e risolvendo si ha
$$\frac{(10+x)^2}{x^2} = 3$$
estraendo la radice quadrata si ha
$$\frac{(10+x)}{x} = \sqrt{3}$$
da cui $x = 14\,cm$.

Esercizio 15. Le cariche e le coordinate di due particelle nel piano xy sono $q_1 = +3.0\,\mu C$, $x_1 = 3.5\,cm$, $y_1 = 0.50\,cm$, e $q_2 = -4.0\,\mu C$, $x_2 = -2.0\,cm$, $y_2 = 1.5\,cm$. Calcolare l'intensità e la direzione della forza elettrostatica su q_2. Stabilire la posizione di una terza carica $q_3 = +4.0\,\mu C$ affinché la forza elettrostatica netta su $q_2$sia nulla.



Soluzione: La figura mostra la posizione delle due cariche in base alle coordinate nel piano cartesiano. Calcoliamo l'intensità della forza mediante la legge di Coulomb dopo aver calcolato la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_q q_2}^2 = (3.5+2)^2 + (0.5-1.5)^2 = 31.25\,cm^2$$

$$F = 8.99\cdot 10^9 \times \frac{3.0\cdot 10^{-6}\times 4.0\cdot 10^{-6}}{31.25\cdot 10^{-4}} = 36\,N$$

lungo la direzione congiungente che forma un angolo con l'asse x

$$\theta = \arctan\left(-\frac{2}{11}\right) = -10°$$

la carica q_3 deve essere posta a sinistra della carica q_2 e sulla congiungente le due cariche, poiché esercita su q_2 una forza attrattiva così come q_1. Dovrà pertanto risultare $F_{1-2} = -F_{3-2}$, e quindi in valore assoluto $F_{3-2} = 36\,N$. Calcoliamo quindi la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_3 q_2} = \sqrt{\frac{8.99\cdot 10^9\times 4.0\cdot 10^{-6}\times 4.0\cdot 10^{-6}}{36}} = 6.7\,cm$$

applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, si può ottenere l'incremento in ascissa e ordinata rispetto al punto in cui è posta la carica q_2:

$$\begin{aligned}\Delta x &= 6.7\times\cos(-10°) = 6.6\\ \Delta y &= 6.7\times\sin(-10°) = 1.2\end{aligned}$$

Pertanto le coordinate del punto in cui si trova q_3 saranno

$$\begin{aligned}x_{q_3} &= -8.6\,cm\\ y_{q_3} &= 2.7\,cm\end{aligned}$$

Esercizio 16. Due cariche puntiformi libere $+q$ e $+4q$ si trovano ad una distanza L l'una dall'altra. Una terza carica viene posta in modo che l'intero sistema sia in equilibrio. Trovare segno, valore e posizione della terza carica.

Soluzione: L'unica possibilità affinché tutte le cariche risultino in equilibrio è che la terza carica sia negativa e posta tra le due. In queste modo si possono contrastare le forze repulsive delle due cariche positive. (È possibile verificare graficamente mediante i vettori delle forze questa condizione). Tutte le tre cariche devono stare in equilibrio, pertanto devono annullarsi tutte le coppie di forze che agiscono su ogni carica. Tenendo conto dei segni si ha

$$\begin{cases}-F_{13}+F_{12}=0\\ -F_{23}+F_{12}=0\\ -F_{13}-F_{23}=0\end{cases}$$

sommando la prima e la terza, cambiata di segno, si ha la condizione

$$F_{12}+F_{23}=0$$

e sostituendo i valori assegnati e indicando con x la distanza tra la carica 1 e la 3 e $L-x$ la distanza tra la carica 2 e la 3

$$\frac{4q^2}{L^2} = \frac{-4qq_3}{(L-x)^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = -\frac{q(L-x)^2}{L^2}$$

per ricavare la distanza incognita utilizziamo la prima relazione tra le forze

$$-\frac{qq_3}{x^2} = \frac{4q^2}{L^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = \frac{4qx^2}{L^2}$$

confrontando le due relazioni

$$-\frac{q(L-x)^2}{L^2} = \frac{4qx^2}{L^2}$$

risolvendo, si ottiene

$$(L-x)^2 = 4x^2$$

svolgendo si ha l'equazione

$$3x^2 + 2Lx - L^2 = 0$$

da cui si ottiene

$$x = \frac{1}{3}L$$

e la terza carica sarà

$$q_3 = \frac{-4q\frac{1}{9}L^2}{L^2} = -\frac{4q}{9}$$

Esercizio 17. Quanto dovrebbero valere due cariche positive uguali che, poste sulla Terra e sulla Luna, fossero in grado di neutralizzare la loro attrazione gravitazionale? È necessario conoscere la distanza Terra-Luna? Quante tonnellate di idrogeno ionizzato sarebbero necessarie per avere la carica calcolata?

Soluzione: L'attrazione dovuta alla forza gravitazionale tra le due cariche, essendo poste su Terra e Luna corrisponde all'attrazione tra le masse dei due astri

$$F = G\frac{m_T m_L}{R^2}$$

dove R è la distanza Terra-Luna. La forza repulsiva elettrica è espressa da

$$F = k\frac{q^2}{R^2}$$

affinché le forze siano uguali deve valere

$$Gm_T m_L = kq^2$$

e come si può osservare la distanza R non interviene in tale relazione. Ora

$$q = \sqrt{\frac{Gm_T m_L}{k}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \, \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5.98 \cdot 10^{24} \times 7.36 \cdot 10^{22} \; [kg^2]}{8.99 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2}}} = 5.7 \cdot 10^{13} \, C$$

Se la carica è quella di un protone (idrogeno ionizzato) allora vale $1.602 \cdot 10^{-19} \, C$ e quindi il numero dei protoni è

$$n^\circ = \frac{5.7 \cdot 10^{13}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 3.6 \cdot 10^{32} \, protoni$$

e nota la massa di un protone si ha

$$m = 3.6 \cdot 10^{32} \times 1.67 \cdot 10^{-27} \, kg = 600 \, ton$$

Esercizio 18. Una certa carica Q viene divisa in due parti q e $Q - q$. Trovare la relazione tra Q e q affinché le due frazioni, poste ad una distanza data, producano la massima repulsione elettrostatica.

Soluzione: La forza elettrostatica tra le due cariche è

$$F = k\frac{q\,(Q-q)}{r^2}$$

Dati r e k, il massimo di F sarà il massimo del prodotto $qQ - q^2$. Dal punto di vista algebrico questo è un polinomio di 2° grado nella lettera q, che si rappresenta mediante una parabola rivolta verso il basso per la presenza del coefficiente negativo del termine quadrato. Il suo massimo coincide con il vertice della parabola, cioè

$$V \equiv F_{max}\left(\frac{Q}{2}; \frac{Q^2}{2}\right)$$

per cui avremo $q = \frac{Q}{2}$.

Esercizio 19. Due cariche Q vengono fissate su due vertici opposti di un quadrato. Due cariche q vengono poste sugli altri due vertici. Se la forza elettrica risultante su Q è nulla, trovare la relazione tra q e Q. Valutare se è possibile scegliere q in modo che la forza elettrica risultante su ogni carica sia nulla.

Soluzione: Se la forza risultante su Q è nulla, allora q deve avere carica di segno opposto e le forze esercitate dalle due cariche q sulla Q sono la componente orizzontale e verticale della forza equilibrante la forza repulsiva tra le due cariche Q. Calcoliamo la forza repulsiva tra le due cariche Q, supposto l il lato del quadrato

$$F = k\frac{Q^2}{2l^2}$$

tale forza è uguale e opposta alla equilibrante data dalla somma delle forze prodotte dalle due cariche q, poste a 90°rispetto alla carica Q

$$F = \sqrt{2\left(\frac{kqQ}{l^2}\right)} = k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

La somma delle due forze è nulla, pertanto

$$k\frac{Q^2}{2l^2} = -k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

riducendo, si ottiene

$$\frac{Q}{2} = -q\sqrt{2}$$

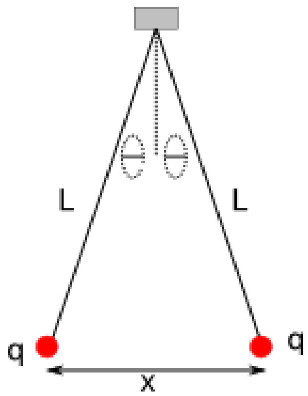
da cui

$$Q = -2\sqrt{2}q$$

Esercizio 20. Due palline uguali di massa m sono appese con fili di seta di lunghezza L e hanno carica q (vedi figura). Si assuma che l'angolo θ sia così piccolo che la $\tan\theta$ possa essere sostituita con $\sin\theta$. Mostrare che. in questa approssimazione, all'equilibrio si ha

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dove x è la distanza tra le palline. Se $L = 120\,cm$, $m = 10\,g$ e $x = 5.0\,cm$, trovare il valore di q.



Soluzione: Nell'approssimazione indicata la sferetta cade, sotto l'azione del suo peso, lungo la congiungente le due cariche, perché se $\tan\theta \cong \sin\theta$, allora l'altezza del triangolo isoscele è circa il suo lato obliquo. Ciò consente di poter considerare la forza elettrica e quella di richiamo del pendolo come parallele e allineate lungo la congiungente delle cariche. Pertanto, se la forza elettrica equilibra la componente parallela della forza peso si ha

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = mg\sin\theta$$

ma per quanto detto il seno dell'angolo è dato dal rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\sin\theta = \frac{\frac{x}{2}}{L} = \frac{x}{2L}$$

sostituendo, si ha

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = \frac{mgx}{2L}$$

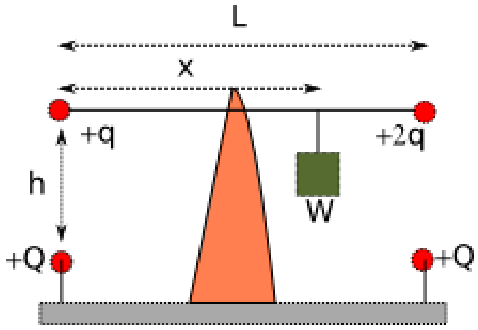
risolvendo rispetto a x

$$x = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}}$$

Se ora sostituiamo i valori numerici assegnati, si ha

$$q=\sqrt{\frac{mgx^3 4\pi\varepsilon_0}{2L}}=\sqrt{\frac{0.01\,kg\times 9.81\,\frac{m}{s^2}\times 0.05^3\,m^3\times 4\pi\times 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}{2.40\,m}}=2.4\cdot 10^{-8}\,C$$

Esercizio 21. La figura mostra una lunga asticella di materiale isolante, senza massa, imperniata al centro e bilanciata con un peso W posto alla distanza x dal suo estremo sinistro. Alle estremità sinistra e destra dell'asticella sono poste le cariche q e $2q$ rispettivamente, mentre sotto ognuna di queste cariche è fissata una carica positiva Q a una distanza h. Calcolare la posizione x dove deve essere appeso W affinché l'asticella sia bilanciata.



Soluzione: L'asta non può subire moti traslatori sotto l'effetto delle forze essendo imperniata su un sostegno. Dobbiamo pertanto considerare i momenti delle forze agenti in grado di far ruotare l'asta attorno al perno. Le forze che agiscono sono quelle elettriche F_{qQ}, F_{2qQ}, F_{q2q} e quella gravitazionale dovuta al peso W. Il momento di una forza è definito come il prodotto vettoriale della forza per il suo braccio, cioè della distanza tra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione. La forza F_{q2q} tra le due cariche poste sull'asta è diretta parallelamente all'asta stessa e pertanto il suo momento sarà nullo. Consideriamo solo le forze che agiscono verticalmente. Le forze elettriche, repulsive, sono dirette verso l'alto, mentre la forza gravitazionale è diretta verso il basso. Poiché l'asta è in equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Calcoliamo i momenti delle singole forze agenti e sommiamoli:

$$k\frac{2qQ}{h^2}\,\frac{L}{2}+k\frac{2qQ}{h^2}\left(-\frac{L}{2}\right)-W\left(x-\frac{L}{2}\right)=0$$

dove i segni positivi sono stati presi per i versi destra e alto, e negativi sinistra e in basso. Risolvendo rispetto ad x

$$x=\frac{L}{2}+k\frac{qQ}{h^2W}\,\frac{L}{2}=\frac{L}{2}\left(1+k\frac{qQ}{h^2W}\right)$$